Chapitre 13

Variables aléatoires réelles finies

On suppose dans tout le chapitre qu'il y a un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ avec lequel on travaille, sans le préciser. On suppose en outre que l'univers Ω est de cardinal fini.

I Généralités

1) Définitions :

Définition 1

On appelle variable aléatoire réelle toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$.

$$X : \begin{array}{ll} \Omega & \to \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto X(\omega) \end{array}$$

Exemples :

- Pour modéliser un jeu de "pile" ou "face", avec $\Omega = \{$"pile", "face"$\}$, on peut introduire une variable aléatoire X définie par $X($"pile"$) = 1$ et $X($"face"$) = 0$.
- Le lancer d'un dé 6 faces introduit naturellement une variable aléatoire : pour $i \in [\![1, 6]\!]$, $X($"obtenir le chiffre i"$) = i$.
- Pour modéliser la somme de deux dés, on peut modéliser le lancer des deux dés avec $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, puis définir une variable aléatoire S définie par $S((i, j)) = i + j$.

  On peut aussi utiliser deux variables X_1 et X_2 donnant les résultats du premier et du second dé, puis poser $S = X_1 + X_2$

  A nouveau, plusieurs modélisations, plusieurs choix de variables aléatoires seront possibles.

2) Univers image

Définition 2

On appelle univers image d'une variable X, noté $X(\Omega)$, l'image de Ω par X. Ainsi,

$$X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$$

Autrement dit : $X(\omega)$ est l'ensemble des valeurs possibles pour la variables aléatoires.

Exemples :

- pour pile ou face : $X(\Omega) =$
- Pour un lancer de deux dés dont on fait la somme : $S(\Omega) =$
- Soit $c \in \mathbb{R}$ et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie pour tout ω par $X(\omega) = c$. Alors $X(\Omega) = \{c\}$. Une telle variable est dite "certaine".

3) Evénements associés à une variable aléatoire :

Soit $B \subset \mathbb{R}$. On s'intéresse aux résultats de l'expérience qui donnent, par X, une valeur dans B. Autrement dit, on cherche tous les résultats $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega) \in B$. Ces ω forment donc un sous ensemble de Ω, donc un événement :

Définition 3

Soit X une variable aléatoire réelle et $B \subset \mathbb{R}$. On note $[X \in B]$ l'événement suivant :

$$[X \in B] = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \in B\}$$

Dans le même esprit, on introduit d'autres notations :

$$[X = a] \text{ pour}$$

$$[X < a] \text{ pour}$$

$$[a \leq X \leq b] \text{ pour}$$

$$\text{etc.}$$

Par exemple : pour un lancer de deux dés, supposons qu'on s'intéresse à tous les lancers dont la somme est supérieur à 10. Ainsi, $B = [10, +\infty[$ (ou plus simplement $B = \{10, 11, 12\}$). L'événement qui nous intéresse est donc noté

$$[S \in \{10, 11, 12\}]$$

ou plus naturellement :

$$[S \geq 10]$$

Proposition 1

Soit X une variable aléatoire à univers image fini avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (on suppose les x_i distincts)
Alors les événements $[X = x_1], [X = x_2], \ldots, [X = x_n]$ forment un système complet d'événements.

▷ *Preuve :*

◁

Remarque :

Le système complet d'événements associé à une variable aléatoire est le plus "fin" que l'on puisse imaginer. C'est à dire que si on connait tous les $P(X = x_k)$ alors on peut calculer $P(X \in B)$ pour n'importe quel ensemble B en procédant par union.

II Loi d'une variable aléatoire réelle

1) Loi

a) Définition

Définition 4

Soit X une v.a.r. discrète.
Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ où $n = card(X(\Omega))$.

On appelle loi de probabilité de la variable X (ou simplement "loi de X") l'application

$$\begin{array}{rl} X(\Omega) & \to [0,1] \\ x_k & \mapsto P(X = x_k) \end{array}$$

Autrement dit, donner la loi d'une variable aléatoire discrète, c'est donner les probabilités des événements du système complet d'événements associé à la variable.

b) Un exemple :

Un forain propose le jeu suivant : pour jouer à ce jeu, on paye 5€. On lance une pièce de monnaie deux fois de suite. La pièce est équilibrée.

- Si la pièce donne deux fois le même résultat, le forain nous donne 6€.
- Si pile sort en premier, puis face, c'est perdu.
- Si face sort en premier, puis pile, le forain nous donne 8 €

Quelle est la loi du gain (mise comprise) ?

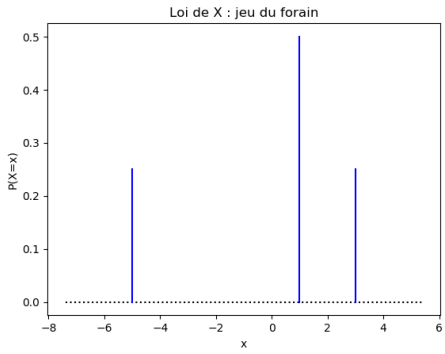
c) Représentation

Donner la liste des valeurs ou une formule donnant les $P(X = x_k)$ suffit pour expliciter une loi.

Dans le cas de variables aléatoires finies en particulier, on apprécie de donner un tableau récapitulatif.
Par exemple pour le jeu précédent, on peut résumer la loi de X via le tableau suivant :

x	-5	1	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$		

On peut aussi faire un diagramme en bâtons : en chaque x_k possible, on trace un trait vertical de hauteur la probabilité de $[X = x_k]$:



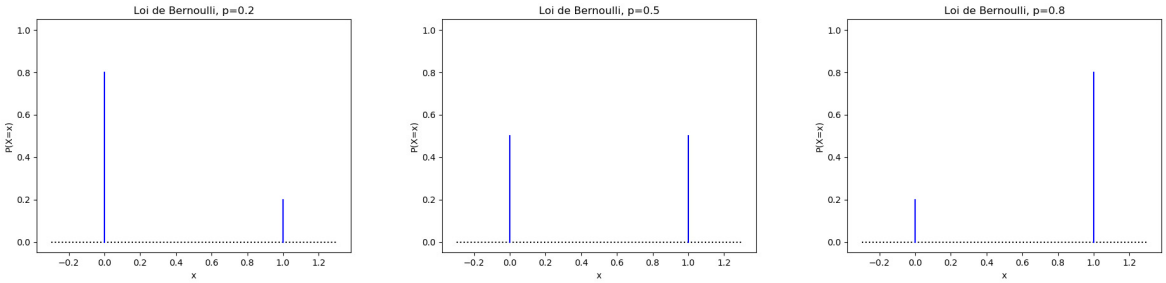
2) Deux lois usuelles fréquemment utilisées

a) Loi de Bernoulli

Définition 5

Soit $p \in]0,1[$. On appelle variable de Bernoulli de paramètre p toute v.a.r X vérifiant :
(i) $X(\Omega) = \{0,1\}$
(ii) Sa loi est donnée par $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$
Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

On peut donner son diagramme en bâton :



Méthode : *Quand utiliser une loi de Bernoulli ?*
On utilise typiquement cette loi dans la modélisation d'un phénomène n'admettant que deux issues.

Par exemple pile ou face, avec $X(\text{"}pile\text{"}) = 1$ et $X(\text{"}face\text{"}) = 0$ et une probabilité p d'avoir "pile".

On l'utilise fréquemment pour des phénomènes de "succès/echecs", "positif/negatif", etc...

Exemple théorique : l'indicatrice
Rappel : Soit $A \subset \Omega$. On note $\mathbf{1}_A$ l'application

$$\begin{array}{rl} \Omega & \mapsto \mathbb{R} \\ \omega & \to \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \end{array}$$

C'est une variable aléatoire, avec deux résultats possibles 1 ou 0.
Elle suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $p = P(\mathbf{1}_A = 1) = P(A)$.

Méthode Python *Représentation de la loi de Bernoulli*

Voilà un exemple de code Python pour simuler une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On utilise la fonction `random()` du module `numpy.random` qui renvoie un nombre aléatoire uniformément distribué dans $[0, 1[$:

```
import numpy.random as rd

def bernoulli(p):
    x = rd.random()
    if x < p:
        return 1
    else:
        return 0
```

Le saviez-vous ? *Jean Bernoulli*

Jean Bernoulli est un scientifique suisse né en 1654. Fils de commerçant et promis à des études littéraires et philosophiques, il se découvre une vocation de scientifique et entreprend une série de voyages en Europe pour se perfectionner.



Brillant "touche à tout", c'est en probabilité qu'il fera ses plus grands travaux, mais il est aussi connu pour de nombreuses recherches autour des séries... et pour avoir découvert le nombre e en étudiant la limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ au cours d'un problème de calcul de taux d'intérêts composés !

Son plus grand ouvrage est une synthèse des travaux d'autres auteurs autour des probabilités, publié en 1713, soit 8 ans après sa mort. On y trouve plusieurs concepts encore utilisés aujourd'hui.

Il n'est bien sûr pas l'inventeur à proprement parler de la loi de Bernoulli, mais cette variable fut nommée ainsi en son honneur, d'autant qu'il fut le premier à l'utiliser pour introduire la loi binomiale via le célèbre "schéma de Bernoulli".

b) Loi uniforme :

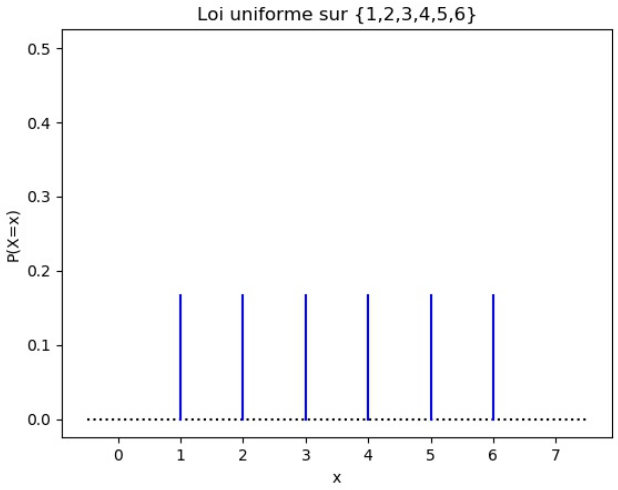
Définition 6

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ si et seulement si

(i) $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$

(ii) pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(X = k) = \frac{1}{n}$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$



A noter : *Variantes*

- On peut définir une loi uniforme sur n'importe quel ensemble :
  soit $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ un ensemble fini de n éléments de $\mathbb{R}$.
  Soit X une v.a.r telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], P(X = e_i) = \frac{1}{n}$$

  On dit alors que X suit une loi uniforme sur E, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$
- Fréquemment, on aura des lois uniformes sur des intervalles d'entier $[\![a, b]\!]$, qu'on notera $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$

  On aura alors pour tout $k \in [\![a, b]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{1}{b - a + 1}$

Méthode : *Utilisation de la loi uniforme*

Cette loi intervient dans les mêmes situations que la probabilité uniforme pour modéliser des événements équiprobables.
Par exemple pour modéliser un dé 6 faces équilibré, on utilisera une variable

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1; 6]\!])$$

Méthode Python *Représentation de la loi uniforme*

Voici un exemple de code Python pour simuler une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On utilise la fonction `randint()` du module `numpy.random` qui renvoie un entier aléatoire uniformément distribué dans un intervalle donné :

```
import numpy.random as rd
def uniforme(n):
    return rd.randint(1, n+1,N)
```

Le troisième argument de `randint` permet de générer plusieurs valeurs à la fois si besoin.
Testez la fonction en simulant 10 lancers d'un dé équilibré.

Exemple :

3) Opérations sur les variables aléatoires

a) Opérations usuelles

Les variables aléatoires étant des applications à valeurs réelles, on peut définir naturellement toutes les opérations usuelles qu'on peut avoir sur $\mathbb{R}$.

Propriété 1

Soient X et Y deux v.a.r. et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :
(i) $X+Y$ est une variable aléatoire
(ii) αX est une variable aléatoire
(iii) XY est une variable aléatoire
(iv) Si Y n'est jamais nulle, X/Y est une variable aléatoire

On peut également composer par une fonction :

Propriété 2

Soit X une v.a.r et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeur dans $\mathbb{R}$.
Alors $f \circ X : \omega \mapsto f(X(\omega))$ est une variable aléatoire, que l'on note simplement $f(X)$.

Méthode : *Opérations et loi*

Il n'y a, en général, pas de formule simple permettant de donner la loi de $X+Y$, de XY ou de $f(X)$: il faut tout faire "à la main" à partir du ou des systèmes complets d'événements associés aux variables de départ.

Exemple

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket -1, 1 \rrbracket)$. Ainsi, $P(X=-1) = \frac{1}{3}$, $P(X=0) = \frac{1}{3}$ et $P(X=1) = \frac{1}{3}$.
Quelle est la loi de $Y = 3X+1$?

Toujours avec $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket -1, 1 \rrbracket)$, quelle est la loi de $Z = X^2$?

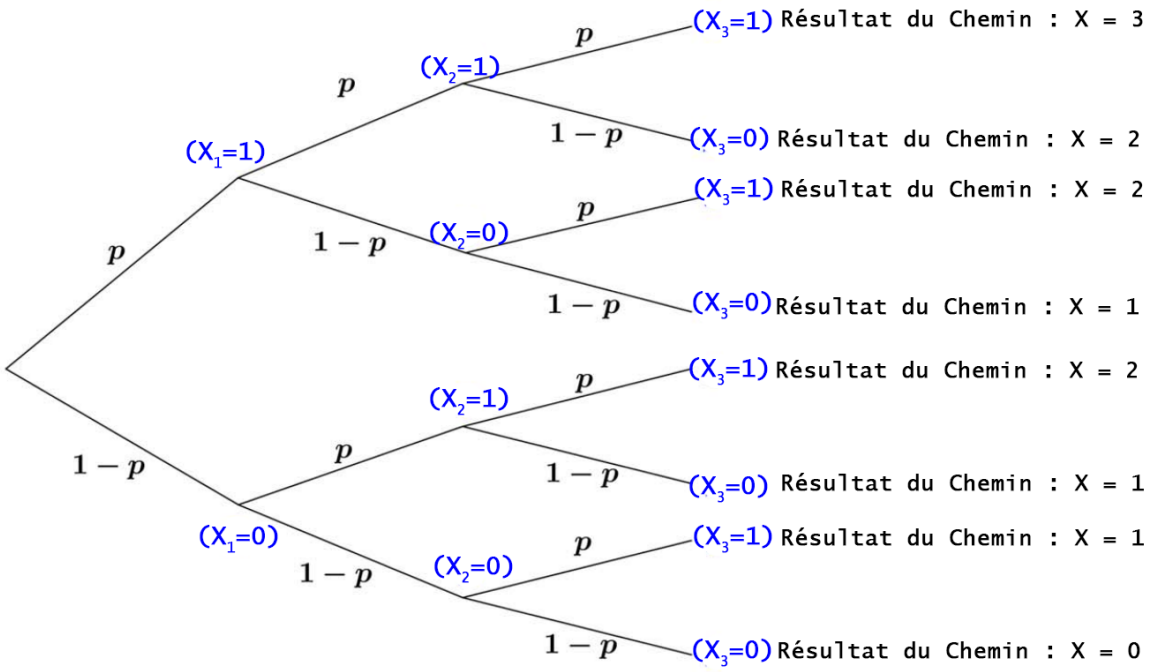
b) Somme de variables aléatoires de Bernoulli

Problème considéré :
On lance n fois et de manière indépendante une pièce de monnaie qui donne "face" avec la probabilité p. On compte le nombre de faces obtenues, et on note X ce nombre.
Quelle est la loi de X ?

Traduction comme somme de v.a.
On modélise le résultat du i ème lancé avec une variable aléatoire $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$: l'événement $[X_i = 1]$ correspond à "obtenir face au i eme lancer", et $[X_i = 0]$ à "obtenir pile au i eme lancer".
La variable X recherchée est donc $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$
Remarquons que comme les lancers sont indépendants, si $i \neq j$, $[X_i = 1]$ et $[X_j = 1]$ sont indépendants (idem avec $[X_i = 0]$ et $[X_j = 1]$, etc)

Détermination de la loi de X

On peut également voir cela sous forme de "schéma de Bernoulli" et dénombrer les chemins qui nous intéressent :



Le raisonnement est identique : tous les chemins contenant k fois 1 ont même probabilité de survenir, et le nombre de tels chemins correspondent au nombre de façon de choisir de monter k fois parmi les n étapes du schéma.

c) Variable aléatoire binomiale

L'exemple précédent nous permet d'introduire une dernière loi :

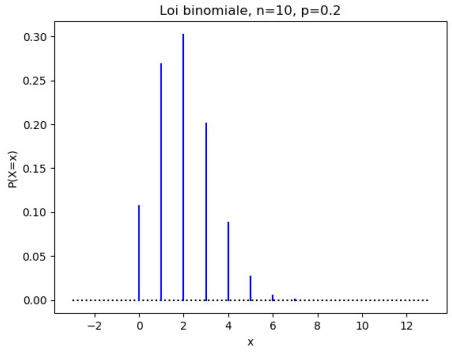
Définition 7

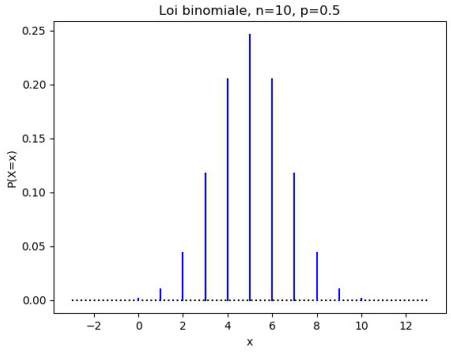
Soit X une variable aléatoire, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.
On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ si et seulement si :

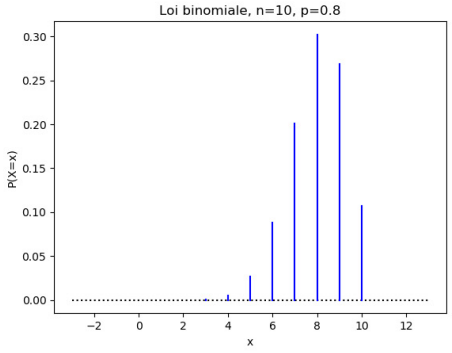
(i) $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$

(ii) $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Quelques diagrammes en bâton :







A noter : *utilisation typique :*

— Répétition d'une situation "succès/échec" et comptage des succès.
— Tirage avec remise

Exemple :
Un chapeau contient 4 lapins angora et 9 lapins de garenne. On extrait dix fois un lapin du chapeau, en remettant le lapin obtenu entre chaque tirage.
Soit N le nombre de lapins angora extraits du chapeau.
Quelle est la loi de N ? Quelle est la probabilité d'obtenir une seule fois un lapin angora ?

Méthode Python *Représentation de la loi binomiale*

Voici un exemple de code Python pour simuler une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On peut simuler le schéma de Bernoulli en sommant n variables de Bernoulli de paramètre p :

```
import numpy.random as rd
def binomiale(n, p):
    total = 0
    for i in range(n):
        x = rd.random()
        if x < p:
            total = total + 1
    return total
```

En pratique, on utilisera la fonction `binomial()` du module `numpy.random` qui renvoie un entier aléatoire suivant une loi binomiale :

```
import numpy.random as rd
rd.binomial(n, p, N)
```

Le troisième argument optionnel N permet de générer un tableau de N simulations de la même loi binomiale. Simulez pour l'essayer 10 tirages suivant une loi binomiale de paramètres 5 et 0.3.

Remarque :
Une loi de bernoulli de paramètre p est une loi binomiale de paramètres 1 et p. On peut donc utiliser la fonction `binomial()` pour simuler des variables de Bernoulli :

```
import numpy.random as rd
rd.binomial(1, p, N)
```

donne N simulations d'une variable de Bernoulli de paramètre p.

III Espérance et Variance

Deux caractéristiques sont souvent étudiées pour les variables aléatoires et correspondent à des besoins concrets en statistique et en analyse de données.

1) Espérance

a) Définition

Définition 8 (*cas fini*)

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a.r. avec $X(\Omega)$ un ensemble fini. On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. On appelle espérance de X la quantité noté $E(X)$ définie par

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)$$

Remarque : l'espérance d'une v.a. est la moyenne "avec coefficients" des résultats possibles : les coefficients sont les probabilités d'avoir ces résultats. Elle correspond au gain moyen auquel on peut s'attendre.

Exemple
On reprend l'exemple du jeu du forain :

b) Espérance des lois usuelles :

Loi uniforme :

Proposition 2

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, *alors* $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

▷ *Preuve :*

◁

Exemple :
On lance un dé 6 faces équilibrés. Quel est le résultat moyen obtenu ?
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$ modélisant l'expérience. On a donc $E(X) = \dfrac{1+6}{2} = 3.5$.

Cas d'une Bernoulli
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors

Ainsi (à retenir) : $\boxed{\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{B}(p), \text{ alors } E(X) = p}$

Cas d'une binomiale :
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors

Ainsi (à retenir) : $\boxed{\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p), \text{ alors } E(X) = np}$

Cas d'une loi certaine :
Soit X suivant une loi certaine, c'est à dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $X(\omega) = C$ pour tout ω.
Alors $E(X) = CP(X = C) = C$.

Ainsi (à retenir) : $\boxed{\text{Si } X \text{ est certaine, alors } E(X) = X}$

2) Quelques propriétés de l'espérance :

a) Théorème du transfert :

Soit X une v.a.r. et f une fonction à valeur réelle définie sur un ensemble contenant $X(\Omega)$.
On s'intéresse à la variable $f(X)$, et plus précisément, à $E(f(X))$.
D'après la définition, il faut commencer par chercher $f(X)(\Omega)$, puis calculer

$$E(f(X)) = \sum_{y \in f(X)(\Omega)} yP(f(X) = y)$$

Cela demande donc de connaître $P(f(X) = y)$, c'est à dire la loi de $f(X)$, qui est, en général, pas si simple à obtenir...
On dispose néanmoins du théorème suivant :

Théorème 1

Soit X une variable aléatoire finie, telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, et g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. L'espérance de la variable $g(X)$ est donnée par :

$$E(g(X)) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\, P(X = x_k)$$

▷ *Preuve :* Admis. ◁

Exemple :
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket -2, 2 \rrbracket)$. On veut calculer $E(X^2)$:

Remarque : grâce à ce théorème, c'est $P(X = x_k)$ dans la formule, pas $P(f(X) = y_k)$. C'est de là que vient le nom "théorème du transfert" : le f, au lieu d'être dans la probabilité, est "transféré" sur la valeur devant la proba... Il suffit donc d'avoir la loi de X, peu importe f.

b) Linéarité

Théorème 2

Soient X et Y deux variables aléatoires.
Alors pour tout a et b réel, on a

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

▷ *Preuve :* On pose, pour simplifier les notations par la suite, $X(\Omega) = \{x_i, i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$ et de même $Y(\Omega) = \{y_j, j \in \llbracket 1; m \rrbracket\}$

$$E(aX + bY) = \sum_{z \in (aX+bY)(\Omega)} zP(aX + bY = z)$$

On utilise alors les probas totales avec le SCE : $(X = x_i \cap Y = y_j)_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,m \rrbracket}$.

$$= \sum_{z \in (aX+by)(\Omega)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} z \underbrace{P(aX + bY = z \cap X = x_i \cap Y = y_j)}_{\neq 0 \quad \text{ssi } z = ax_i + by_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\sum_{\epsilon \in (ax+by)(\Omega)} zP(aX + bY = z \cap X = x_i \cap Y = y_j)}$$

Dans cette somme, le seul terme non nul est celui ou $z = ax_i + by_j$.

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \quad (ax_i + by_j)\, P\left(X = x_i \cap Y = y_j\right)$$

On a utilisé le fait que pour le seul terme non nul de la somme, on a

$$P\left(aX + bY = ax_i + b_{y_j} \cap X = x_i \cap Y = y_j\right) = P\left(X = x_i \cap Y = y_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} ax_i P\left(X = x_i \cap Y = y_j\right) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} by_j P\left(X = x_i \cap \quad Y = y_j\right)$$

$$= a\sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{\sum_{j=1}^{m} P\left(X = x_i \cap Y = y_j\right)}_{P(X=x_i) \text{ par probas totales avec le SCE } (Y=y_i)_j} + b\sum_{j=1}^{m} y_j \underbrace{\sum_{i=1}^{n} P\left(X = x_i \cap Y = y_j\right)}_{P(Y=y_j) \text{ par probas totales avec le SCE } (X=x_i)_i}$$

$$= a\sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) + b\sum_{j=1}^{m} y_j P(Y = y_j)$$

$$= \boxed{aE(X) + bE(Y)}$$

◁

Corollaire 1

Soit $n \geq 2$ et soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires, alors

$$E(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$$

▷ *Preuve* : C'est une récurrence

◁

Exemples

- Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ avec $a < b$.
  Posons $Y = X - a + 1$. Alors $Y \hookrightarrow$

  Ainsi $E(Y) =$

  Donc $E(X) =$

- Soit X une variable aléatoire et $m = E(X)$. En posant $Y = X - m$ on obtient

$$E(Y) = E(X) - E(m) = m - m = 0$$

On dit alors que la variable Y est "centrée".

- Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Alors on peut écrire que $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ avec $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

Ainsi $E(X) =$

c) Croissance de l'espérance

Propriété 3

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$. Alors $E(X) \leq E(Y)$

▷ *Preuve :*

◁

Méthode Python *Simulation de l'espérance*

Pour simuler des espérances, on va utiliser la loi des grands nombres que vous verrez plus en détail l'an prochain. L'idée est de simuler un grand nombre de fois la variable aléatoire, puis de faire la moyenne des résultats obtenus. La loi des grands nombres dit que ce résultat approche l'espérance. On utilise la fonction `mean()` du module `numpy` pour faire la moyenne d'un tableau de valeurs.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def esperance_loi_binomiale(n, p, N):
    simulations = rd.binomial(n, p, N)
    esperance = np.mean(simulations)
    return esperance
```

Ici, la fonction `esperance_loi_binomiale(n, p, N)` simule N tirages d'une loi binomiale de paramètres n et p, puis calcule la moyenne des résultats obtenus pour approcher l'espérance de cette loi binomiale. Donnez la valeur approchée de l'espérance d'une loi uniforme sur $[\![1;6]\!]$ en simulant 100000 tirages. Comparez ce résultat avec la valeur exacte.

3) Variance

a) Variance et écart type

Définition 9

On appelle variance d'une v.a.r X le "moment centré d'ordre 2", c'est à dire

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

On appelle écart-type de X la quantité $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

Interprétation
$|X - E(X)|$ donne la distance de X à $E(X)$. Cette distance se manipule assez mal (à cause de la valeur absolue...) on préfère regarder cette quantité au carré : $(X - E(X))^2$, puis regarder la valeur moyenne de cette distance quadratique : $E((X - E(X))^2)$.
Ainsi, la variance traduit la tendance d'une v.a.r. à s'écarter de sa moyenne, à "varier" autour de sa moyenne.
Si on prend la racine de cette distance quadratique, on retombe sur une distance "tout court", qui traduit l'écart moyen ("écart type") entre X et sa moyenne.

Proposition 3 (*Formule de Koenig-Huygens*)

Soit X une v.a.r., alors on a

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

▷ *Preuve :*

◁

b) Exemples

Variance d'une Bernoulli
Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $E(X) = p$, donc $V(X) = E((X-p)^2) = (0-p)^2 P(X=0) + (1-p)^2 P(X=1)$, c'est à dire $V(X) = p^2(1-p) + (1-p)^2 p = (1-p)(p^2 + p(1-p)) = (1-p)p$.
A retenir :

$$\boxed{\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{B}(p),\ V(X) = p(1-p)}$$

Variance d'une loi Binomiale

Le calcul de la variance d'une loi binomiale ressemble beaucoup à ce qu'on a fait pour l'espérance.

A retenir :

$$\boxed{\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p), \text{ alors } V(X) = np(1-p)}$$

On peut aussi "retrouver" ce résultat en écrivant X comme somme de variables de Bernoulli indépendantes. On verra dans un prochain chapitre que si les variables sont indépendantes, la variance de la somme est la somme des variances.

Variance de la loi uniforme

Propriété 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et soit* $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$.
Alors $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$

▷ *Preuve :*

◁

Variance d'une loi certaine :

Proposition 4

Soit X une v.a.r. Alors X est une variable certaine si et seulement si $V(X) = 0$

▷ *Preuve :*

◁

c) Opérations et variance :

Proposition 5

Soit X une v.a.r et $a, b \in \mathbb{R}$, alors $V(aX + b) = a^2 V(X)$

▷ *Preuve :*

◁

Exemples d'application :

- Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ avec $a < b$.
  Posons $Y = X - a + 1$. Alors $Y \hookrightarrow$

  Alors $V(X) =$

- **Proposition 6**

  Soit X une v.a.r. admettant une espérance m et un écart type $\sigma_X \neq 0$, alors $X^* = \dfrac{X - m}{\sigma_X}$ a une espérance nulle et un écart type de 1.
  Une telle variable est dite "centrée réduite"

  ▷ *Preuve* : $E(Y) = \dfrac{1}{\sigma_X}(E(X) - m) = \dfrac{1}{\sigma_X}(m - m) = 0$ et $\sigma_Y = \dfrac{1}{|\sigma_X|}\sigma_X = 1$ ◁

Méthode Python *Simulation de la variance*

Pour simuler des variances, on va utiliser la formule de Koenig-Huygens. On sait déjà simuler l'espérance, il suffit donc de simuler $E(X^2)$ et $E(X)$ pour obtenir la variance. On utilise la fonction `mean()` du module `numpy` pour faire la moyenne d'un tableau de valeurs.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def variance_loi_binomiale(n, p, N):
    simulations = rd.binomial(n, p, N)
    esperance = np.mean(simulations)
    esperance_carre = np.mean(simulations**2)
    variance = esperance_carre - esperance**2
    return variance
```

En fait, on peut aussi utiliser la fonction `var()` de `numpy` qui calcule directement la variance d'un tableau de valeurs.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def variance_loi_binomiale_v2(n, p, N):
    simulations = rd.binomial(n, p, N)
    variance = np.var(simulations)
    return variance
```

Donnez la valeur approchée de la variance d'une loi uniforme sur $[\![1;6]\!]$ en simulant 100000 tirages avec les deux méthodes. Comparez ce résultat avec la valeur exacte.